Probabilités au poker

- Le nombre de mains possibles au poker est $C_{52}^5 = 2\,598\,960$
  Regardons la probabilité des différentes "mains"

- Probabilité d'une paire: PPABC
  Il faut choisir une sorte de carte pour la paire : C_{13}^1 et 2 cartes parmi les 4 cartes de même sorte: C_4^2
  Ensuite il faut choisir 3 autres sortes C_{12}^3 et une carte parmi les 4 de chaque sorte choisie: $C_4^1\, C_4^1\, C_4^1$
  Ce qui donne comme probabilité $\dfrac{C_{13}^1\, C_4^2\, C_{12}^3 (C_4^1)^3}{C_{52}^5} = \dfrac{352}{833} = 0.422569$

- Probabilité d'un brelan: BBBAC
  Il faut choisir une sorte de carte pour le brelan : C_{13}^1 et 3 cartes parmi les 4 cartes de même sorte: C_4^3
  Ensuite il faut choisir 2 autres sortes C_{12}^2 et une carte parmi les 4 de chaque sorte choisie: $C_4^1\, C_4^1$
  Ce qui donne comme probabilité $\dfrac{C_{13}^1\, C_4^3\, C_{12}^2 (C_4^1)^2}{C_{52}^5} = \dfrac{88}{4165} = 0.0211285$

- Probabilité d'un carré: CCCCA
  Il faut choisir une sorte de carte pour le carré : C_{13}^1 (et 4 cartes parmi les 4 cartes de même sorte: $C_4^4 = 1$)
  Ensuite il faut choisir 1 autre sorte C_{12}^1 et une carte parmi les 4 de la sorte choisie: C_4^1
  Ce qui donne comme probabilité $\dfrac{C_{13}^1\, C_{12}^1\, C_4^1}{C_{52}^5} = \dfrac{1}{4165} = 0.000240096$

- Probabilité de deux paires: AABBC
  Il faut choisir deux sortes de cartes pour les paires : C_{13}^2 et 2 cartes parmi les 4 cartes de chacune des deux sortes: $C_4^2\, C_4^2$
  Ensuite il faut choisir 1 autre sorte C_{11}^1 et une carte parmi les 4 de la sorte choisie: C_4^1
  Ce qui donne comme probabilité $\dfrac{C_{13}^2\, C_4^2\, C_4^2\, C_{11}^1\, C_4^1}{C_{52}^5} = \dfrac{198}{4165} = 0.047539$

- Probabilité d'un full: AAABB
  Il faut choisir une sorte de cartes pour le brelan : C_{13}^1 et 3 cartes parmi les 4 cartes de chacune des deux sortes: C_4^3
  Ensuite il faut choisir 1 autre sorte C_{12}^1 et deux cartes parmi les 4 de la paire choisie: C_4^2
  Ce qui donne comme probabilité $\dfrac{C_{13}^1\, C_4^3\, C_{12}^1\, C_4^2}{C_{52}^5} = \dfrac{6}{4165} = 0.00144058$

- Probabilité d'une quinte flush (straight flush): *cinq cartes de rangs consécutifs et dont la couleur est identique*

  Il faut choisir une couleur : C_4^1 et il y a 10 suites possibles (partant de l'as jusqu'au 10)

  Ce qui donne comme probabilité $\dfrac{C_4^1\, 10}{C_{52}^5} = \dfrac{1}{64\,974} = 0.0000153908$

- Probabilité d'une suite (quinte ou straight): *cinq cartes de rang consécutif (et d'au moins deux couleurs différentes, sinon il s'agit d'une quinte flush)*
  Il faut choisir chacune des 5 cartes parmi une des 4 couleurs et il y a 10 suites possibles (partant de l'as jusqu'au 10). On retire ensuite le nombre de quintes flush.

  Ce qui donne comme probabilité $\dfrac{(C_4^1)^5\, 10 - C_4^1\, 10}{C_{52}^5} = \dfrac{5}{1274} = 0.00392465$

- Probabilité d'une couleur (flush): *cinq cartes de couleur identique (qui ne forment pas une suite, sinon il s'agit d'un straight flush)*
  Il faut choisir une couleur C_4^1 et 5 cartes dans cette couleur C_{13}^5. On retire ensuite le nombre de quintes flush.

Ce qui donne comme probabilité $\frac{C_4^1 C_{13}^5 - C_4^1\, 10}{C_{52}^5} = \frac{1277}{649740} = 0.0019654$

- Probabilité d'une main vide:

  On choisit 5 sortes différentes parmi 13 (pour ne pas avoir de paire, brelan..) C_{13}^5 et 1 carte parmi les 4 de chaque sorte choisie. On enlève ensuite les suites , les quintes flush et les couleurs.

  Ce qui donne comme probabilité $\frac{C_{13}^5 (C_4^1)^5}{C_{52}^5} - \frac{5}{1274} - \frac{1}{64974} - \frac{1277}{649740} = \frac{1277}{2548} = 0.501177$

- Vérification:

  $\frac{352}{833} + \frac{88}{4165} + \frac{1}{4165} + \frac{198}{4165} + \frac{6}{4165} + \frac{1}{64974} + \frac{5}{1274} + \frac{1277}{649740} + \frac{1277}{2548} = 1$

- Table récapitulative

0.0000153908	quinte flush
0.000240096	carré
0.00144058	full
0.0019654	flush
0.00392465	suite
0.0211285	brelan
0.047539	deux paires
0.422569	paire
0.501177	rien