Intervalles ouverts centrés

Considérons un intervalle ouvert quelconque.

$$]a, b[\; = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Recherchons le milieu (ou centre) c de cet intervalle. Il est obtenu par $c = \frac{a+b}{2}$.

Le rayon r de l'intervalle est alors la distance entre le centre et les "bords" (on parle de bornes) a et b de l'intervalle.

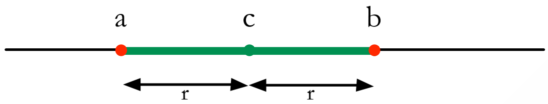
r est donc un réel strictement positif.

$r = c - a$

$r = b - c = b - \left(\frac{a+b}{2}\right) = b - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$

Plus simplement, c'est donc aussi la largeur (le diamètre) de l'intervalle divisé par 2.

$r = \frac{b-a}{2} > 0$



Exprimer l'appartenance d'un réel x à l'intervalle équivaut donc à dire que la distance entre x et le centre de l'intervalle doit être inférieure au rayon.

$x \in]a, b[\iff d(x, c) < r \iff |x - c| < r$

On peut aussi obtenir cette relation de la manière suivante:

$x \in]a, b[$

$\iff$

$a < x < b$

$\iff$

$0 < x - a$ et $x - b < 0$

$\iff$

$0 < x - (c - r)$ et $x - (c + r) < 0$

$\iff$

$-r < x - c$ et $x - c < r$

$\iff$

$-r < x - c < r$

$\iff$

$|x - c| < r$

---

exemple 1: on considère l'intervalle ouvert $I_1 =]-2, 5[$

recherchons le centre et le rayon:

$c = \frac{a+b}{2} = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}$

$r = \frac{b-a}{2} = \frac{5-(-2)}{2} = \frac{7}{2}$

l'intervalle $I_1 = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 5\}$ peut donc être défini de manière équivalente par

$I_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{7}{2}\right\}$

---

exemple 2: soit l'intervalle défini par $I_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| < 1\}$

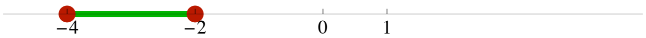
la condition d'appartenance à l'intervalle étant $|x-(-3)| < 1$, nous voyons que le rayon est égal à 1 et le centre est -3.
$c=-3$
$r=1$

les bornes de l'intervalle sont alors:

borne inférieure $a=c-r=-3-1=-4$
borne supérieure $b=c+r=-3+1=-2$

et donc

$I_2 =]-4, -2[$



Intervalles fermés centrés

Considérons un intervalle fermé quelconque.

$]a, b[\; = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Recherchons le milieu (ou centre) c de cet intervalle. Il est obtenu par $c = \frac{a+b}{2}$.

Le rayon r de l'intervalle est alors la distance entre le centre et les "bords" (on parle de bornes) a et b de l'intervalle.

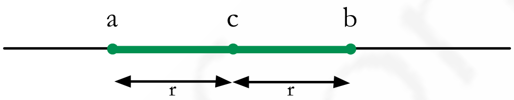
r est donc un réel strictement positif.

$r=c-a$

$r = b-c = b - \left(\frac{a+b}{2}\right) = b - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$

Plus simplement, c'est donc aussi la largeur (le diamètre) de l'intervalle divisé par 2.

$r = \frac{b-a}{2} > 0$



Exprimer l'appartenance d'un réel x à l'intervalle équivaut donc à dire que la distance entre x et le centre de l'intervalle doit être inférieure au rayon.

$x \in [a, b] \Longleftrightarrow d(x, c) \leq r \Longleftrightarrow |x-c| \leq r$

On peut aussi obtenir cette relation de la manière suivante:

$x \in [a, b]$

$\Longleftrightarrow$

$a \leq x \leq b$

$\Longleftrightarrow$

$0 \leq x-a$ et $x-b \leq 0$

$\Longleftrightarrow$

$0 \leq x-(c-r)$ et $x-(c+r) \leq 0$

$\Longleftrightarrow$

$-r \leq x-c$ et $x-c \leq r$

$\Longleftrightarrow$

$-r \leq x-c \leq r$

$\Longleftrightarrow$

$|x-c| \leq r$

---

exemple 1: on considère l'intervalle fermé $I_1 = [-2, 5]$

recherchons le centre et le rayon:

$r = \frac{b-a}{2} = \frac{5-(-2)}{2} = \frac{7}{2}$

l'intervalle $I_1 = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 5\}$ peut donc être défini de manière équivalente par

$I_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{7}{2}\right\}$

---

exemple 2: soit l'intervalle défini par $I_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x+3| \leq 1\}$

la condition d'appartenance à l'intervalle étant $|x-(-3)| \leq 1$, nous voyons que le rayon est égal à 1 et le centre est égal à -3.
$c = -3$
$r = 1$

les bornes de l'intervalle sont alors:
borne inférieure $a = c - r = -3 - 1 = -4$
borne supérieure $b = c + r = -3 + 1 = -2$
et donc
$I_2 = [-4, -2]$