Intégration par subsitution

- $\int x\sqrt{x+1}\; dx$

remarque: cette intégrale peut également être faite par parties

On pose $t = x + 1$
On a alors $x = t - 1$
et $dx = dt$
L'intégrale devient alors
$\int (t-1)\sqrt{t}\; dt = \int \left(t^{3/2} - t^{1/2}\right) dt = \frac{t^{5/2}}{5/2} - \frac{t^{3/2}}{3/2} + k$
On remplace t par $x + 1$ et on obtient les primitives

$\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + k$

- $\int \sqrt{4 - x^2}\; dx$

On pose $x = 2 \sin t$ et donc $t = \text{Arcsin}\,\frac{x}{2}$
On a alors $dx = 2\cos t\, dt$
et $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = \sqrt{4\cos^2 t} = 2\cos t$
L'intégrale devient alors

$\int 2\cos t\; 2\cos t\; dt = \int 4\cos^2 t\; dt$

Sachant que $2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$ (Carnot), on obtient l'intégrale

$\int 2(1 + \cos 2t)\, dt = 2t + \int 2\cos 2t\; dt = 2t + \sin 2t + k = 2t + 2\sin t\cos t + k$

Sachant que $t = \text{Arcsin}\,\frac{x}{2}$, $x = 2\sin t$ et $\sqrt{4 - x^2} = 2\cos t$ on obtient les primitives
$2\,\text{Arcsin}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2} + k$

- $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\, dx$

On pose $t = \sqrt{e^x + 1}$ et donc $x = \ln\left(t^2 - 1\right)$
On a alors $dx = \frac{2t}{t^2-1}\, dt$
$e^x = t^2 - 1$
L'intégrale devient alors

$\int 2\left(t^2 - 1\right) dt = 2\,\frac{t^3}{3} - 2t + k$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(e^x + 1)^3} - 2\sqrt{e^x + 1} + k$

■ Exercices

$$\int \frac{2\,x-1}{x+1}\,dx = 2\,(x+1)-3\,\ln(|x+1|)+\mathrm{k}$$

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \frac{2\,x^{3/2}}{3}-x+2\,\sqrt{x}-2\,\ln\left(\left|\sqrt{x}+1\right|\right)+\mathrm{k}$$

$$\int (x-5)^7\,x\,dx = \frac{1}{9}\,(x-5)^9+\frac{5}{8}\,(x-5)^8+\mathrm{k}$$

$$\int x^2\,(3\,x-1)^3\,dx = \frac{1}{27}\left(\frac{1}{6}\,(3\,x-1)^6+\frac{2}{5}\,(3\,x-1)^5+\frac{1}{4}\,(3\,x-1)^4\right)+\mathrm{k}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+36}}{x}\,dx = 6\,\ln\left(18\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+36}+6}\right|\right)+\sqrt{x^2+36}+\mathrm{k}$$

$$\int \frac{e^x}{9+4\,e^{2\,x}}\,dx = \frac{1}{6}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{2\,e^x}{3}\right)+\mathrm{k}$$